

Temat: Okrąg wpisany w trójkąt. 2 lekcje

Witam,

Przed wami kolejny temat, w podręczniku wiadomości ze stron 199 – 201.

15 maja (piątek) w godzinach od 8⁰⁰ do 21⁵⁹ będzie udostępniony test z pól trójkątów i okręgów wpisanych w trójkąty.

Warto mieć rozwiązania z 3 i 4 karty pracy.

Link do testu - <https://www.testportal.pl/test.html?t=vGb9x5KwjMKb>

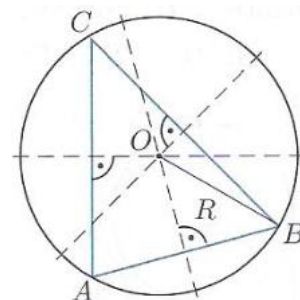
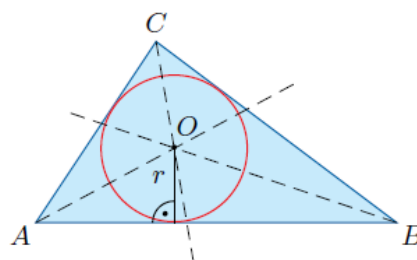
Pozdrawiam

Edyta Kolenda

Okrąg nazywamy wpisanym w trójkąt (a trójkąt nazywamy opisanym na okręgu), jeżeli wszystkie boki trójkąta są styczne do tego okręgu. W każdy trójkąt można wpisać okrąg – mówi o tym poniższe twierdzenie.

TWIERDZENIE

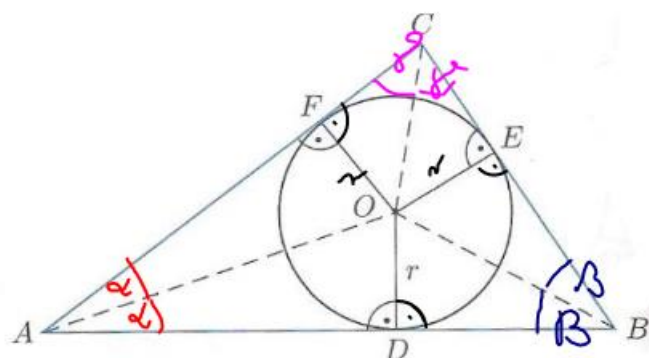
Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



I. Własność, którą najczęściej wykorzystujemy, mówi nam, że:

Punkty styczności okręgu dzielą boki trójkąta na 3 pary odcinków równych:

$$|FA| = |DA|; |DB| = |EB| \text{ i } |EC| = |FC|$$



DOWÓD:

Odcinki AO, BO i CO są dwusiecznymi kątów więc

$$|\sphericalangle FAO| = |\sphericalangle DAO| = \alpha$$

$$|\sphericalangle DBO| = |\sphericalangle EBO| = \beta$$

$$|\sphericalangle ECO| = |\sphericalangle FCO| = \gamma$$

promienie są prostopadłe do boków trójkąta więc

$$|\sphericalangle FOA| = |\sphericalangle DOA| = 90^\circ - \alpha$$

$$|\sphericalangle DOB| = |\sphericalangle EOB| = 90^\circ - \beta$$

$$|\sphericalangle EOC| = |\sphericalangle FOC| = 90^\circ - \gamma$$

czyli w $\triangle ABC$ powstało 6 trójkątów prostokątnych, które parami są przystające: $\triangle FAO \equiv \triangle DAO$; $\triangle DBO \equiv \triangle EBO$ i $\triangle CEO \equiv \triangle CFO$ stąd wynika, że:

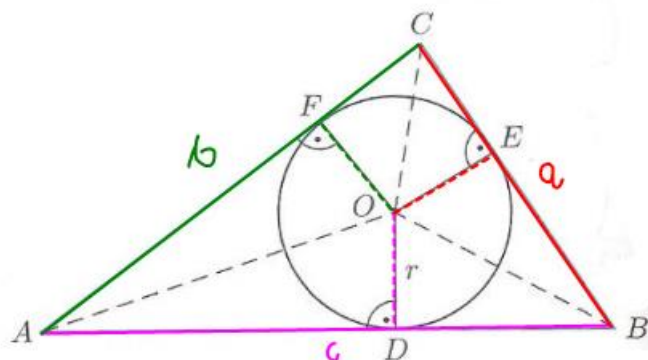
$$|FA| = |DA|; |DB| = |EB| \text{ i } |EC| = |FC|.$$

Przykładowe zadania z rozwiązaniami z tego tematu znajdziecie tu:

<https://cyrkiel.info/liceum/okrag-wpisany-i-opisany-na-trojkatcie>

II. Pole trójkąta $P_{\triangle ABC} = p \cdot r$;

gdzie p – połowa obwodu $\triangle ABC$; r – promień okręgu wpisanego w trójkąt



DOWÓD:

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABO} + P_{\triangle BCO} + P_{\triangle ACO}$$

$$P_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} c \cdot r$$

$$P_{\triangle BCO} = \frac{1}{2} a \cdot r$$

$$+ P_{\triangle ACO} = \frac{1}{2} b \cdot r$$

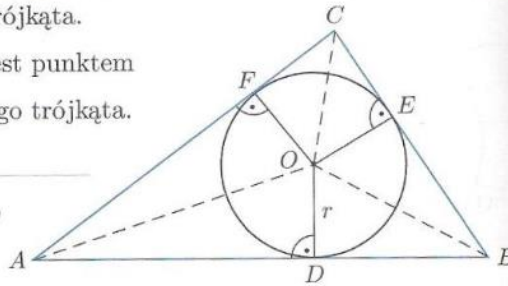
$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} c \cdot r + \frac{1}{2} a \cdot r + \frac{1}{2} b \cdot r = r \cdot \frac{1}{2} (a + b + c)$$

$$\frac{1}{2} (a + b + c) = p \text{ – połowa obwodu trójkąta}$$

$$P_{\triangle ABC} = p \cdot r$$

30. Uzupełnij zdania.

- Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest punktem równoodległym od _____ tego trójkąta.
- Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest punktem przecięcia _____ tego trójkąta.
- Trójkąty ADO i AFO są _____
- Prawdziwe są równości: $|AD| = |AF|$,
 $|BD| = \underline{\hspace{1cm}}$, $|CE| = \underline{\hspace{1cm}}$



31. Dokończ rozwiązanie zadania.

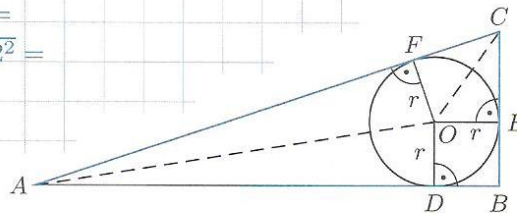
a) Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $|AB| = 6$ i $|BC| = 2$.

$$\triangle AFO \equiv \triangle ADO, \text{ zatem } |AF| = |AD| = 6 - r$$

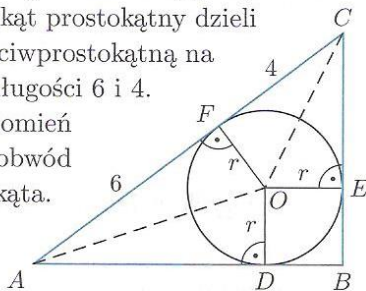
$$\triangle CFO \equiv \triangle CEO, \text{ zatem } |FC| = |EC| = 2 - r$$

$$|AC| = |AF| + |FC| = (6 - r) + (2 - r) =$$

$$\text{Z twierdzenia Pitagorasa } |AC| = \sqrt{6^2 + 2^2} =$$



b) Punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny dzieli jego przeciwprostokątną na odcinki długości 6 i 4. Oblicz promień okręgu i obwód tego trójkąta.



$$\triangle ADO \equiv \triangle AFO, \text{ zatem } |AD| = 6$$

$$\triangle CFO \equiv \triangle CEO, \text{ zatem } |CE| =$$

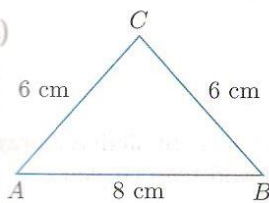
$$\text{Stąd } |AB| = 6 + r \text{ oraz } |BC| =$$

$$\text{Z twierdzenia Pitagorasa dla } \triangle ABC:$$

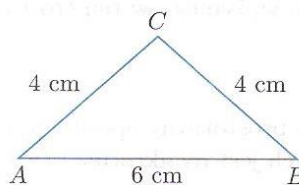
$$(6 + r)^2 + (4 + r)^2 = 10^2$$

32. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

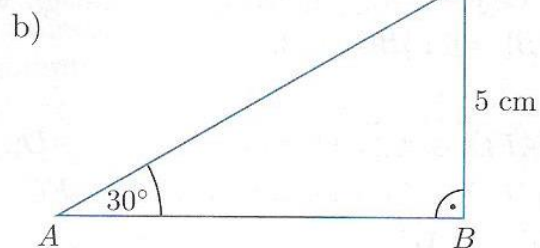
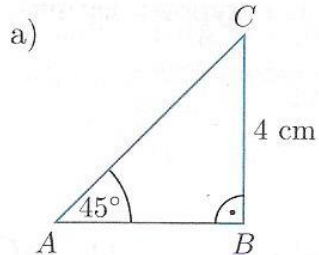
a)



b)



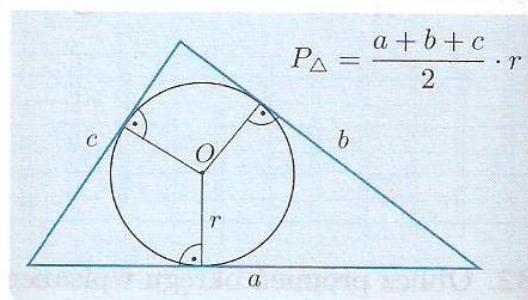
33. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC .



34. a) Trójkąt o obwodzie równym 20 cm jest opisany na okręgu o promieniu 3 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

$P =$ _____

b) Pole trójkąta o bokach 8 cm, 10 cm i 14 cm jest równe $16\sqrt{6}$ cm². Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.



35. Trójkąt prostokątny opisany jest na okręgu o promieniu $r = 1$ cm. Jedna z przyprostokątnych jest dwukrotnie dłuższa od drugiej. Oblicz obwód tego trójkąta.

Ćwiczenie 4

- a) Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 4.
- b) Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny jest równy 2. Oblicz długość boku tego trójkąta.

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny jest równy $\frac{1}{3}$ wysokości tego trójkąta.

1. a) Uzasadnij, że pole trójkąta równobocznego o boku długości a wyraża się wzorem $P = \frac{3}{2}ar$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.
b) Uzasadnij, że promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku długości a jest równy $\frac{\sqrt{3}}{6}a$.
c) Oblicz pole trójkąta równobocznego opisanego na okręgu o promieniu 4.
1. Niech a będzie długością boku trójkąta równobocznego, h – jego wysokością, P – polem, a r – promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Oblicz pozostałe trzy wielkości, jeżeli dane jest:
a) $a = 12$ cm, b) $h = 3\sqrt{3}$ cm, c) $r = 2$ cm, d) $P = 4\sqrt{3}$ cm².