

Temat: Odczytywanie własności funkcji z wykresu. – 2 lekcje

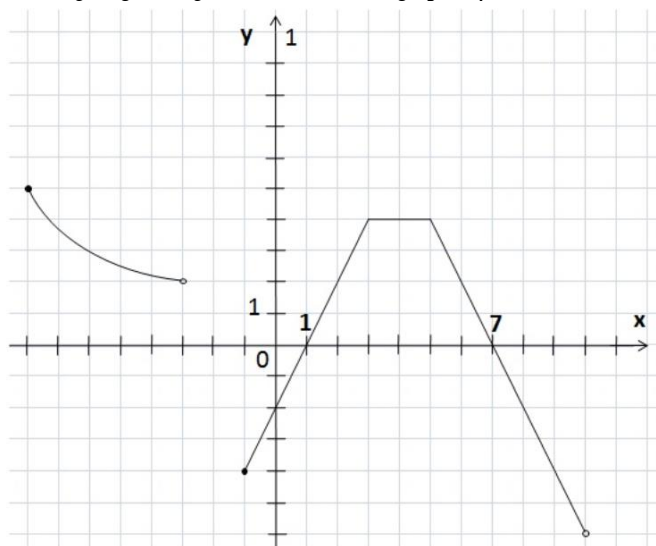
Z wykresu funkcji będziemy odczytywali następujące własności:

- dziedzinę funkcji,
- zbiór wartości,
- przedziały monotoniczności,
- miejsce zerowe,
- punkty przecięcia z osiami,
- argumenty dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie/ujemne,
- argumenty dla których funkcja przyjmuje daną wartość,
- argumenty dla których funkcja spełnia daną nierówność,
- sprawdzić, czy dany punkt należy do wykresu funkcji,
- wartość minimalną (minimum) i wartość maksymalną (maksimum).

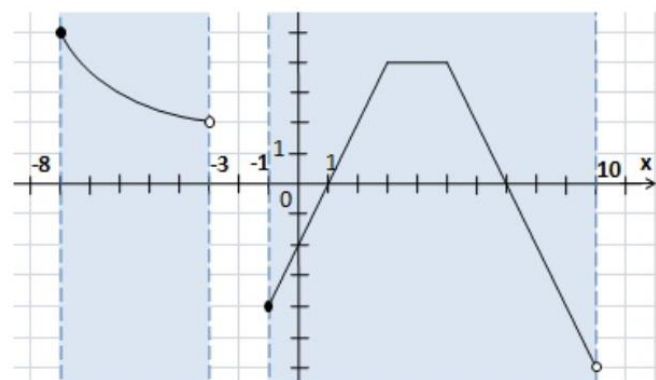
**Wsparciem do tego tematu są strony 153 – 159 z podręcznika.**

### Przykład

Odczytaj z wykresu funkcji  $f$  w/w własności:



### Dziedzina funkcji

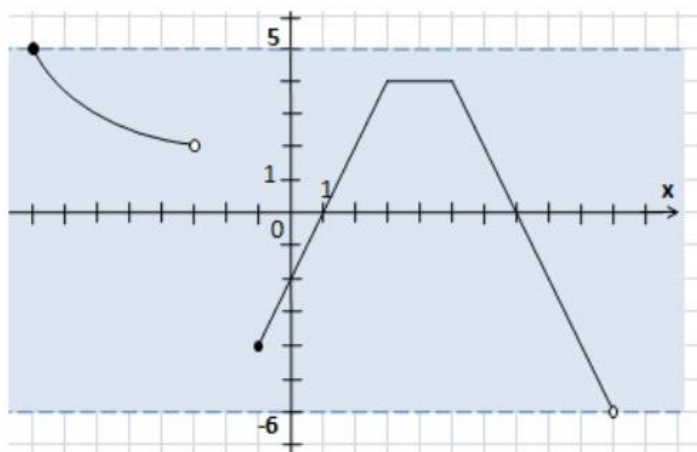


Dziedziną jest przedział lub przedziały, w jakich rozciąga się wykres (wzdłuż osi  $OX$ ):

*Zwracamy uwagę na kółka (czy są zamalowane czy nie)*

W tym wypadku dziedziną są dwa przedziały lewostronnie domknięte połączone znakiem sumy  $D_f = \langle -8; -3 \rangle \cup \langle -1; 10 \rangle$

## Zbiór wartości

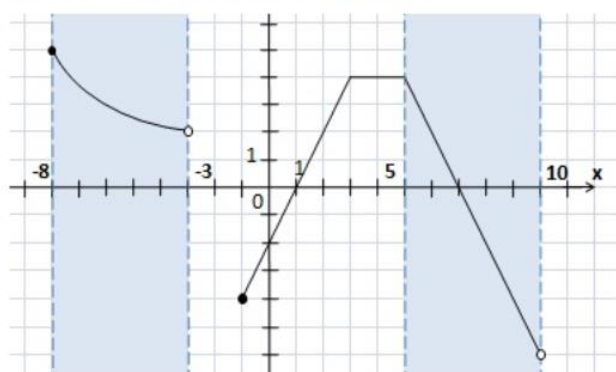


Zbiorem wartości jest przedział lub przedziały, w jakich rozciąga się wykres (wzdłuż osi  $OY$ ):

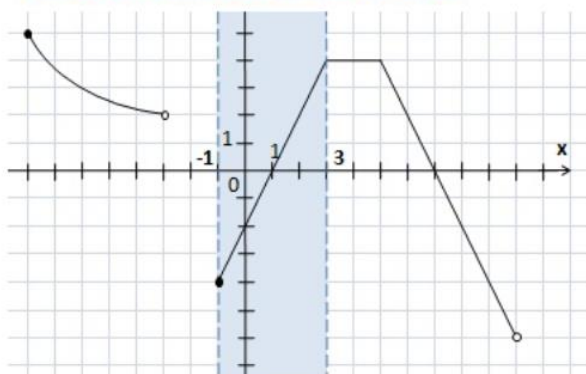
Zbiór wartości oznaczamy symbolem  $f(D_f)$  lub  $Y_f$   $f(D_f) = (-6; 5)$

## Przedziały monotoniczności

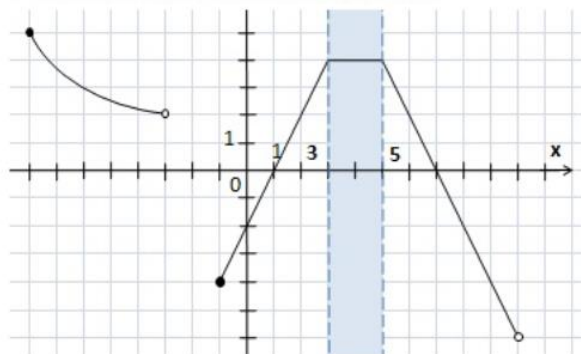
Rozpatrywana funkcja jest malejąca w dwóch przedziałach: od -8 do -3 oraz od 5 do 10:



Funkcja jest rosnąca w przedziale od -1 do 3.



Funkcja jest stała w przedziale od 3 do 5.



Można zapisać to:

$f(x) \searrow$  w przedziałach  $\langle -8, -3 \rangle$  i  $\langle 5, 10 \rangle$

$f(x) \nearrow$  w przedziale  $\langle -1, 3 \rangle$

$f(x) \rightarrow$  w przedziale  $\langle 3, 5 \rangle$

Częściej natomiast zapisujemy kolejne przedziały:

dla  $x \in \langle -8; -3 \rangle$   $f(x) \searrow$  [czyt. dla  $x \in \langle -8; -3 \rangle$  funkcja jest malejąca]

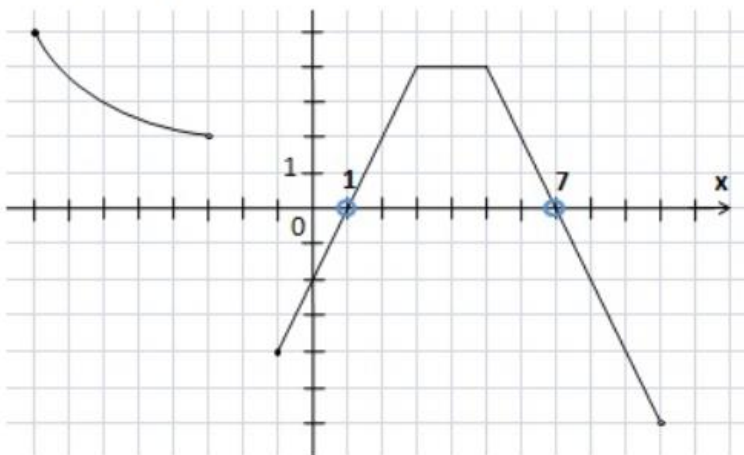
dla  $x \in \langle -1; 3 \rangle$   $f(x) \nearrow$  [czyt. dla  $x \in \langle -1; 3 \rangle$  funkcja jest rosnąca]

dla  $x \in \langle 3; 5 \rangle$   $f(x) \rightarrow$  [czyt. dla  $x \in \langle 3; 5 \rangle$  funkcja jest stała]

dla  $x \in \langle 5; 10 \rangle$   $f(x) \searrow$  [czyt. dla  $x \in \langle 5; 10 \rangle$  funkcja jest malejąca]

### Miejsce zerowe

Miejsce zerowe, to argument ( $x$ ), dla którego wartość ( $y$ ) wynosi zero. Określenie miejsca zerowego, sprowadza się do odczytania argumentów ( $x$ ) w punktach, w których wykres przecina oś odciętych (oś  $OX$ ).



Przyjęło się, że:

- gdy mamy jedno miejsce zerowe oznaczamy je indeksem zero:  $X_0$ ,
- gdy mamy więcej miejsc zerowych (tak jak w rozpatrywanym przykładzie) oznaczmy je kolejnymi liczbami naturalnymi i łączymy spójnikiem „lub” ( $\vee$ ), czyli:  $X_1 \vee X_2 \vee X_3 \dots$

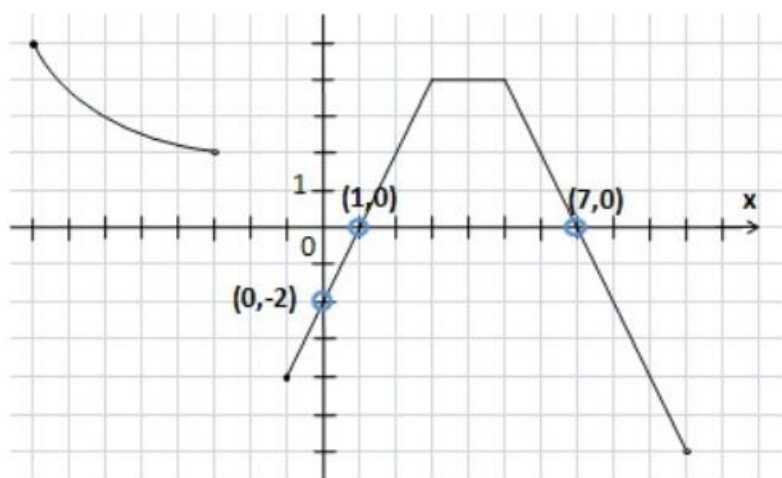
W tym wypadku mamy 2 miejsca zerowe, więc zapisujemy to:

$$f(x) = 0 \text{ dla } x_1 = 1 \text{ lub } x_2 = 7$$

### Punkty przecięcia z osiami

Osobno zapisujemy punkty przecięcia z osią  $OX$  i punkt przecięcia z osią  $OY$  (zawsze jest tylko jeden).

Punkty przecięcia z osią  $OX$  znajdują się w miejscach zerowych, opisanych w poprzednim punkcie.



Zapisujemy:

Punkty przecięcia z osią  $OX$ :

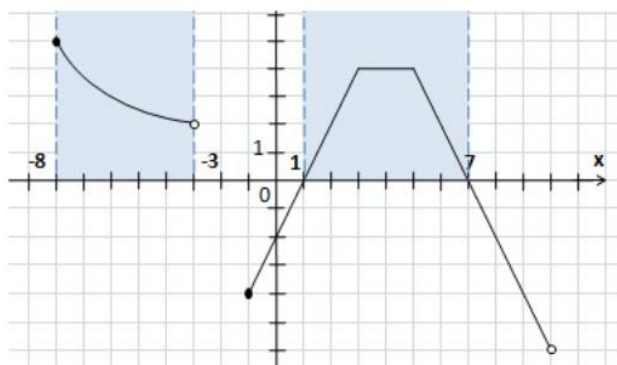
$(1, 0); (7, 0)$

Punkt przecięcia z osią  $OY$ :

$(0, -2)$

### Argumenty dla których funkcja jest dodatnia: $f(x) > 0$

Są to przedziały argumentów ( $x$ ), tych części wykresu, które znajdują się nad osią  $OX$ .

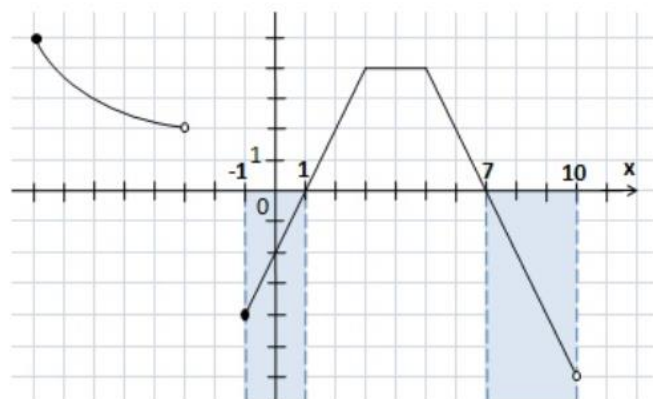


$$f(x) > 0 \quad \text{dla } x \in \langle -8, -3 \rangle \cup (1, 7)$$

Zapisujemy przedziały. Nawiasy przy punktach leżących na osi  $OX$ , będą okrągłe, ponieważ w tych punktach wartość funkcji wynosi zero, a chodzi nam o wartości dodatnie (wyłącznie większe od zera).

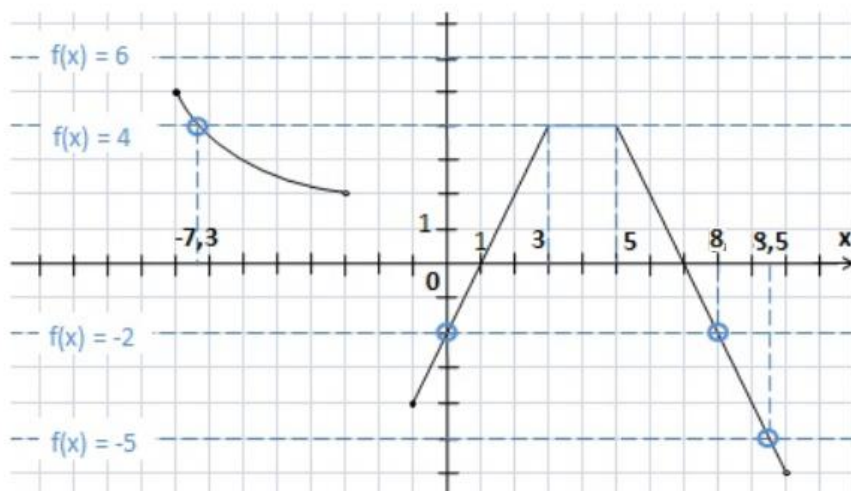
### Argumenty dla których funkcja jest ujemna: $f(x) < 0$

Są to przedziały argumentów ( $x$ ), tych części wykresu, które znajdują się pod osią  $OX$ .



$$f(x) < 0 \quad \text{dla } x \in \langle -1, 1 \rangle \cup (7, 10)$$

### Argumenty dla których funkcja przyjmuje daną wartość



Zapisujemy to:

$f(x) = 6$  - brak takich argumentów

$f(x) = 4$  dla  $x \in \langle 3, 5 \rangle \cup \{-7, 3\}$  -  
w tym wypadku wartość 4 mamy dla argumentu -7,3 oraz w przedziale  $\langle 3, 5 \rangle$

$f(x) = -2$  dla  $x_1 = 0$  lub  $x_2 = 8$

$f(x) = -5$  dla  $x = 9,5$

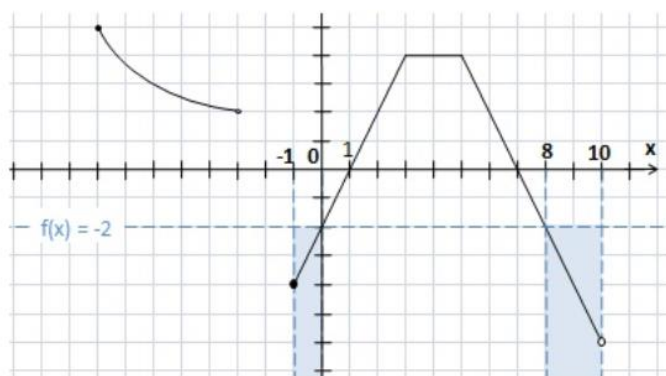


## Karta pracy nr 9 – klasa I TŻiUG\_TL(po podstawówce)

### Argumenty dla których funkcja spełnia daną nierówność

$$f(x) < -2$$

$$f(x) \leq -2$$

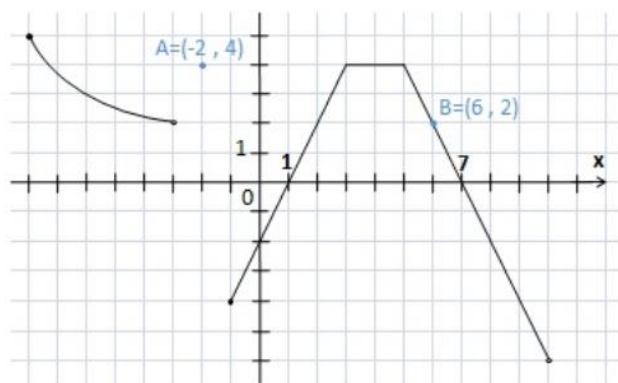


$$f(x) < -2 \quad \text{dla } x \in \langle -1, 0 \rangle \cup \langle 8, 10 \rangle$$

$$f(x) \leq -2 \quad \text{dla } x \in \langle -1, 0 \rangle \cup \langle 8, 10 \rangle$$

### Sprawdzenie czy dany punkt należy do wykresu funkcji

Punkty:  $A = (-2, 4)$ ,  $B = (6, 2)$



Zapisujemy to:

$$A \notin f(x)$$

$$B \in f(x)$$

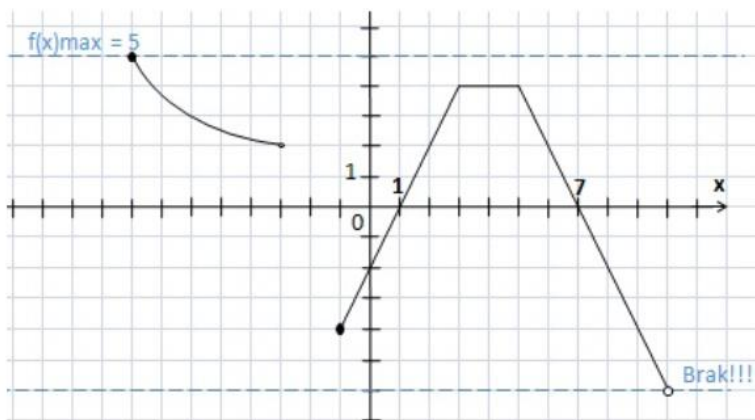
### Minimum i maksimum

Minimalną wartość funkcji oznaczamy:  $f(x)_{\min}$  lub  $y_{\min}$ .

Maksymalną wartość oznaczamy:  $f(x)_{\max}$  lub  $y_{\max}$ .

Wartość maksymalna to wartość (y) najwyżej leżącego punktu wykresu, a minimalna punktu leżącego najniżej. Dodatkowo, oprócz samej wartości wypada podać argument (x) lub przedział argumentów, dla odczytanej wartości.

Jeżeli maksimum lub minimum funkcji wypada w punkcie, w którym znajduje się pusta kropka, minimum lub maksimum nie istnieje.

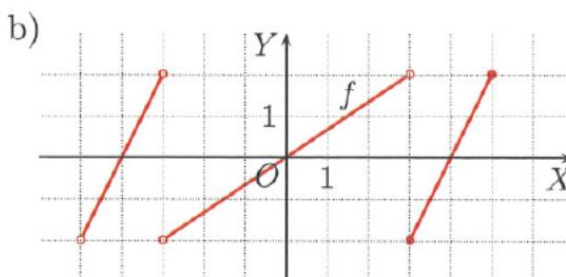
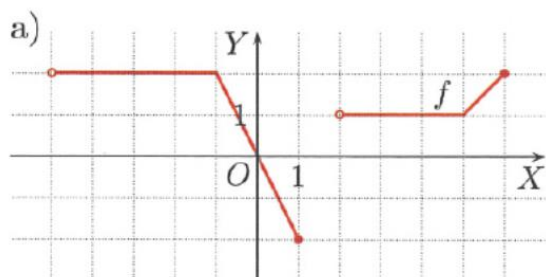


Minimum funkcji: brak.

Maksimum funkcji:  $f(x)_{\max} = 5$  dla  $x = -8$

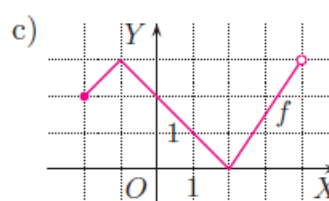
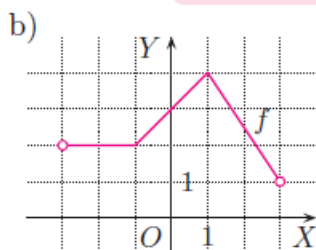
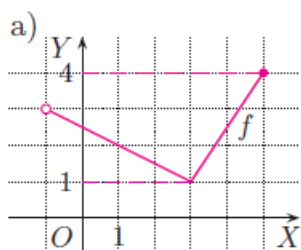
Ćwiczenie 1 str.161

Odczytaj z wykresu funkcji  $f$  jej dziedzinę.

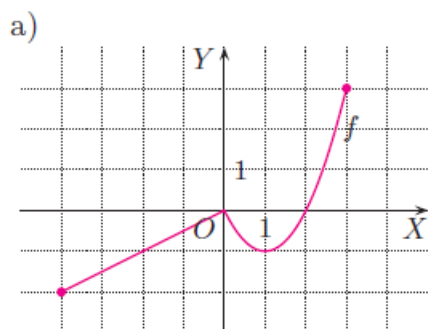


18. Odczytaj z wykresu funkcji  $f$  jej dziedzinę i zbiór wartości.

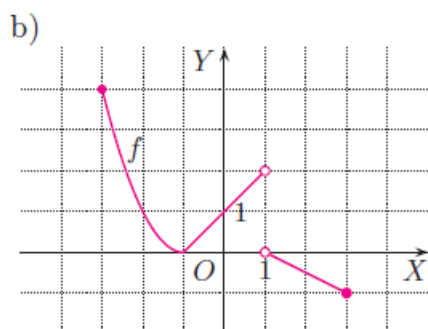
Zbiór wartości funkcji  $f: X \rightarrow Y$  to zbiór tych wszystkich  $y \in Y$ , dla których istnieje taki argument  $x \in X$ , że  $f(x) = y$ .



20. Uzupełnij poniższe informacje na podstawie wykresu funkcji  $f$ .

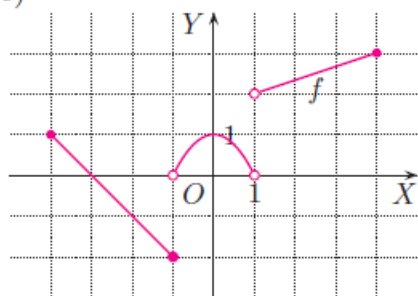


- dziedzina: \_\_\_\_\_
- zbiór wartości: \_\_\_\_\_
- miejsca zerowe:  $x = 0$  oraz  $x = 2$
- funkcja  $f$  przyjmuje najmniejszą wartość \_\_\_\_\_ dla argumentu \_\_\_\_\_ oraz największą wartość \_\_\_\_\_ dla argumentu \_\_\_\_\_



- dziedzina: \_\_\_\_\_
- zbiór wartości: \_\_\_\_\_
- miejsca zerowe: \_\_\_\_\_
- funkcja  $f$  przyjmuje najmniejszą wartość \_\_\_\_\_ dla argumentu \_\_\_\_\_ oraz największą wartość \_\_\_\_\_ dla argumentu \_\_\_\_\_

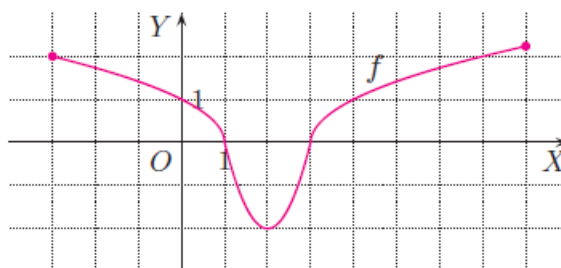
c)



- dziedzina: \_\_\_\_\_
- zbiór wartości: \_\_\_\_\_
- miejsca zerowe: \_\_\_\_\_
- funkcja  $f$  przyjmuje najmniejszą wartość \_\_\_\_\_ dla argumentu \_\_\_\_\_ oraz największą wartość \_\_\_\_\_ dla argumentu \_\_\_\_\_

21. Dany jest wykres funkcji  $f: \langle -3; 8 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Uzupełnij tabelę.

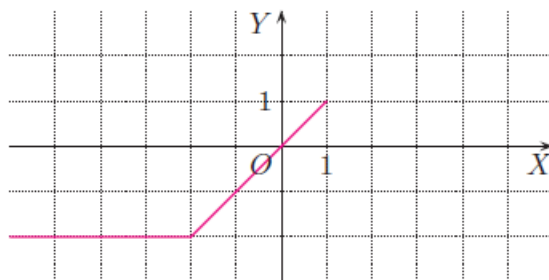
Przedział	Wartość	
	najmniejsza	największa
$\langle -3; 0 \rangle$		
$\langle 0; 8 \rangle$		
$\langle 2; 4 \rangle$	-2	



23. Uzupełnij wykres funkcji  $f$ . Odczytaj z niego zbiór wartości tej funkcji i zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) \leq 1$ .

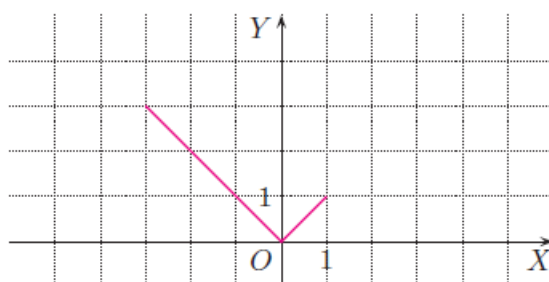
$$a) f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ x & \text{dla } x \in (-2; 1) \\ 1 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$$

- zbiór wartości: \_\_\_\_\_
- $f(x) \leq 1$  dla \_\_\_\_\_



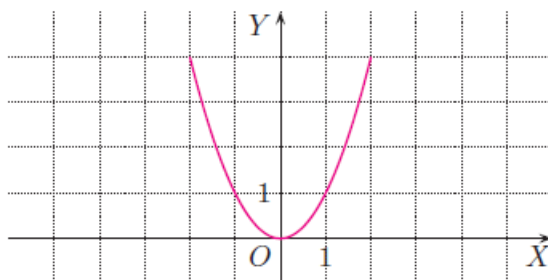
$$b) f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ |x| & \text{dla } x \in (-3; 1) \\ 1 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$$

- zbiór wartości: \_\_\_\_\_
- $f(x) \leq 1$  dla \_\_\_\_\_



$$c) f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ x^2 & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 4 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$$

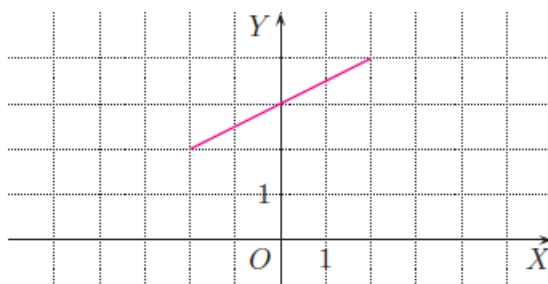
- zbiór wartości: \_\_\_\_\_
- $f(x) \leq 1$  dla \_\_\_\_\_



d)  $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{2}x + 3 & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ -x + 6 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$

• zbiór wartości: \_\_\_\_\_

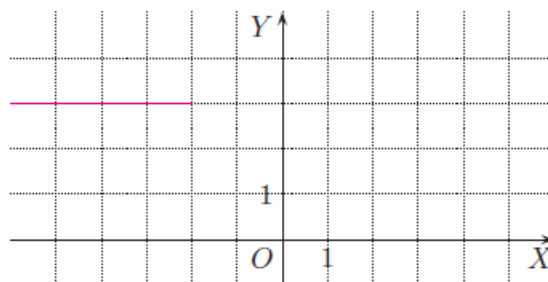
•  $f(x) \leq 1$  dla \_\_\_\_\_



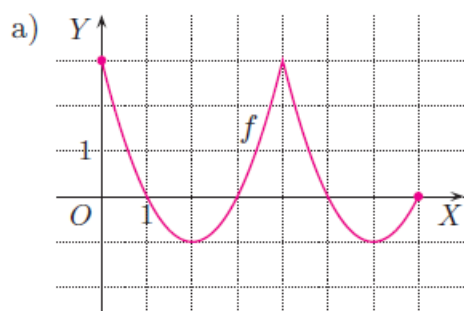
e)  $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -x + 1 & \text{dla } x \in (-2; 1) \\ x - 1 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

• zbiór wartości: \_\_\_\_\_

•  $f(x) \leq 1$  dla \_\_\_\_\_



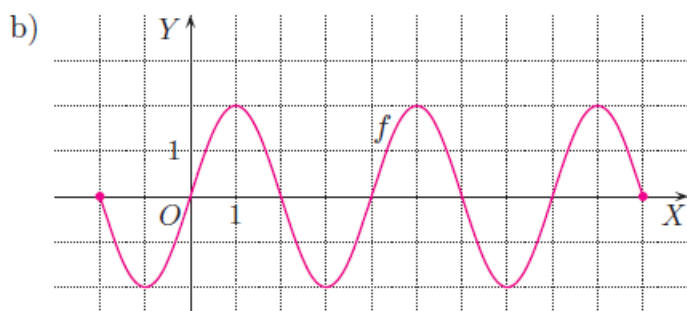
24. Odczytaj z wykresu funkcji  $f$  jej dziedzinę, zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) < 0$  oraz zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) \geq 0$ .



• dziedzina: \_\_\_\_\_

•  $f(x) < 0$  dla \_\_\_\_\_

•  $f(x) \geq 0$  dla \_\_\_\_\_



• dziedzina: \_\_\_\_\_

•  $f(x) < 0$  dla \_\_\_\_\_

•  $f(x) \geq 0$  dla \_\_\_\_\_

1. Z wykresu funkcji  $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$  odczytaj jej miejsca zerowe oraz zbiory rozwiązań nierówności  $f(x) > 0$  i  $f(x) \geq 0$ .

